

TEMA 5. Ecuaciones de rectas y planos en el espacio. Posiciones relativas

Problemas Resueltos

Ecuaciones de rectas y planos

1. Halla, en sus diferentes formas, las ecuaciones de la recta definida por el punto $A(2, -1, 1)$ y el vector $\vec{v} = (-1, 0, 2)$.

¿Pertencen los puntos $P(3, -1, -1)$ y $Q(0, 2, 5)$ a la recta obtenida?

Solución:

Vectorial: $r : (x, y, z) = (2, -1, 1) + \lambda(-1, 0, 2)$.

$$\text{Paramétricas: } r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{Continua: } r : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{2}.$$

Un punto pertenece a una recta cuando cumple su ecuación.

$$\text{El punto } P(3, -1, -1) \in r, \text{ pues: } \begin{cases} 3 = 2 - \lambda \\ -1 = -1 \\ -1 = 1 + 2\lambda \end{cases} \text{ se cumple para } \lambda = -1.$$

El punto $Q(0, 2, 5) \notin r$, pues, en este caso, la segunda coordenada siempre debe valer -1 .

2. Halla las ecuaciones de la recta s que pasa por los puntos $A(1, 3, -4)$ y $B(3, -5, -2)$.

Solución:

La recta s viene determinada por el punto $A(1, 3, -4)$ y por el vector

$$\mathbf{AB} = (3, -5, -2) - (1, 3, -4) = (2, -8, 2) \equiv (1, -4, 1)$$

Su ecuación vectorial es: $s \equiv (x, y, z) = (1, 3, -4) + h(1, -4, 1)$.

$$\text{Sus ecuaciones paramétricas son: } s : \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 3 - 4h \\ z = -4 + h \end{cases}$$

$$\text{En forma continua: } s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+4}{1}.$$

3. Halla la ecuación del plano determinado por los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 2, 2)$ y $C = (1, -1, 0)$.

Solución:

Un plano queda determinado por un punto y dos vectores. El punto puede ser cualquiera de los dados, por ejemplo, A ; los vectores, \mathbf{AB} y \mathbf{AC} . En este caso:

$$\mathbf{AB} = (2, 2, 2) - (1, 0, 1) = (1, 2, 1); \quad \mathbf{AC} = (1, -1, 0) - (1, 0, 1) = (0, -1, -1).$$

Su ecuación será:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda - \mu \\ z = 1 + \lambda - \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 2 & -1 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: -(x-1) + y - (z-1) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \pi: x - y + z - 2 = 0.$$

4. Halla la ecuación del plano determinado por los puntos: $A(1, 3, 2)$, $B(2, 0, 1)$ y $C(1, 4, 3)$.
¿Pertencen los puntos $P(-1, 2, -3)$ y $Q(0, 4, 3)$ al plano obtenido?

Solución:

El plano queda determinado por el punto A (o el B o el C) y por los vectores \mathbf{AB} y \mathbf{AC} .

$$\mathbf{AB} = (2, 0, 1) - (1, 3, 2) = (1, -3, -1); \mathbf{AC} = (1, 4, 3) - (1, 3, 2) = (0, 1, 1).$$

Su ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - 3\lambda + \mu \\ z = 2 - \lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-3 & -3 & 1 \\ z-2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0.$$

Un punto pertenece a un plano cuando cumple su ecuación. Por tanto:

$$P(-1, 2, -3) \in \pi, \text{ pues } 2 \cdot (-1) + 2 - (-3) - 3 = 0;$$

$$Q(0, 4, 3) \notin \pi, \text{ pues } 2 \cdot 0 + 4 - 3 - 3 \neq 0.$$

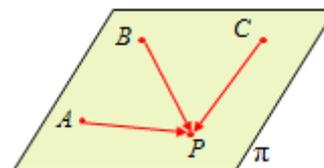
5. Calcula b para que los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, b)$ y $C(1, 0, 0)$ determinen un plano que contenga al punto $P(2, 0, 1)$. ¿Cuál es la ecuación de dicho plano?

Solución:

Si el punto $P(2, 0, 1)$ pertenece al plano determinado por A , B y C , entonces los vectores \mathbf{AP} , \mathbf{BP} y \mathbf{CP} deben ser coplanarios y, en consecuencia, dar lugar a un determinante nulo.

Como $\mathbf{AP} = (1, -1, 0)$, $\mathbf{BP} = (0, -2, 1 - b)$ y $\mathbf{CP} = (1, 0, 1)$, se tendrá que:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1-b \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3 + b = 0 \Rightarrow b = 3.$$



Luego, el valor pedido es $b = 3$.

Por tanto, los puntos son $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 3)$ y $C(1, 0, 0)$; y el plano que determinan:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z-1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: x + y - z - 1 = 0.$$

6. Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $A(-1, -1, 1)$ y tiene por vector normal a $\vec{v} = (1, -2, -1)$.

Halla otro punto P del plano y comprueba que el vector \mathbf{AP} es perpendicular a \vec{v} .

Solución:

Un vector normal del plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$ es $\vec{v}_\pi = (a, b, c)$.

Por tanto, la ecuación del plano pedido será: $\pi: x - 2y - z + d = 0$.

Como debe contener al punto $A \Rightarrow 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 0$.

El plano es: $\pi: x - 2y - z = 0$.

Otro punto P del plano puede ser $P(1, 0, 1)$; de donde $\mathbf{AP} = (1, 0, 1) - (-1, -1, 1) = (2, 1, 0)$.

El producto escalar $\mathbf{AP} \cdot \vec{v} = (2, 1, 0) \cdot (1, -2, -1) = 2 - 2 = 0$. Luego ambos vectores son perpendiculares.

7. Halla las ecuaciones del plano que contiene al punto $P(5, 0, -1)$ y a la recta $r : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -4 \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$.

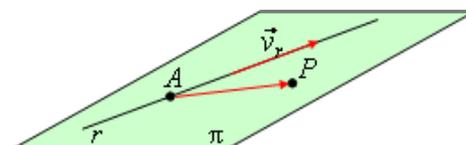
Solución:

El plano pedido viene determinado por el punto P y por los vectores \vec{v}_r , de dirección de la recta, y \overrightarrow{PA} (o \overrightarrow{AP}), siendo A un punto de r .

$$\vec{v}_r = (-1, 0, 1); A = (0, -4, 2); \overrightarrow{PA} = (0, -4, 2) - (5, 0, -1) = (-5, -4, 3).$$

Las ecuaciones paramétricas del plano son:

$$\pi : \begin{cases} x = 5 - \lambda - 5\mu \\ y = -4\mu \\ z = -1 + \lambda + 3\mu \end{cases}$$



Su ecuación general:

$$\pi : \begin{vmatrix} x-5 & -1 & -5 \\ y & 0 & -4 \\ z+1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi : 4(x-5) - 2y + 4(z+1) = 0 \Rightarrow \pi : 2x - y + 2z - 8 = 0.$$

8. Halla la ecuación del plano que contiene al punto $P(1, 1, 1)$ y a la recta

$$r : \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}.$$

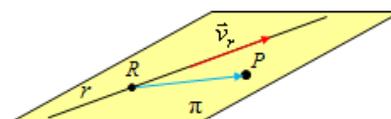
Solución:

El plano pedido viene determinado por el punto $P(1, 1, 1)$ y los vectores \vec{v}_r y \overrightarrow{RP} , siendo $R(3, 1, -1) \in r$.

Luego: $\vec{v}_r = (3, 2, -2)$; $\overrightarrow{RP} = (1, 1, 1) - (3, 1, -1) = (-2, 0, 2)$.

La ecuación del plano pedido es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & -2 \\ y-1 & 2 & 0 \\ z-1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2z - 3 = 0.$$

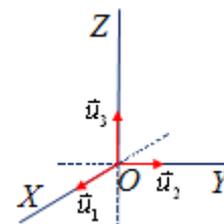


9. Obtén las ecuaciones de las rectas que determinan los ejes cartesianos.

Solución:

El eje OX pasa por origen, $O(0, 0, 0)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$. Su ecuación será: $r_{OX} : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) \rightarrow$

$$\rightarrow \text{en paramétricas: } r_{OX} : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r_{OX} : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$



El eje OY pasa por origen, $O(0, 0, 0)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u}_2 = (0, 1, 0)$. Su

$$\text{ecuación será: } r_{OY} : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(0, 1, 0) \Leftrightarrow r_{OY} : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r_{OY} : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

El eje OZ pasa por origen, $O(0, 0, 0)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u}_3 = (0, 0, 1)$. Su ecuación

$$\text{será: } r_{OZ} : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(0, 0, 1) \Leftrightarrow r_{OZ} : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow r_{OZ} : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

10. Obtén las ecuaciones de los planos cartesianos.

Solución:

El plano XOY contiene al origen y está determinado por los vectores $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$ y $\vec{u}_2 = (0, 1, 0)$. Su ecuación será:

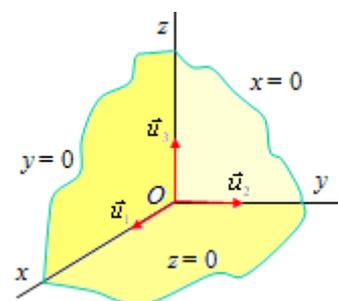
$$\pi_{XOY} : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0.$$

De manera análoga, el plano XOZ será $y = 0$.

Y el plano YOZ tendrá por ecuación $x = 0$.

Observación: Como puede verse, la recta que contiene al eje OX

es el corte de los planos $y = 0$ y $z = 0$. Naturalmente, su ecuación es: $r_{OX} : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$



Otras formas de determinación de planos y rectas

11. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de los planos de ecuaciones:

$$2x - 2y - z = 9 \quad \text{y} \quad 4x - y + z = 42$$

Indica uno de sus puntos y su vector de dirección.

Solución:

$$\text{La recta } r \text{ es, } r : \begin{cases} 2x - 2y - z = 9 \\ 4x - y + z = 42 \end{cases} \Leftrightarrow r : \begin{cases} -2y - z = 9 - 2x \\ -y + z = 42 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow r : \begin{cases} x = p \\ y = -17 + 2p \\ z = 25 - 2p \end{cases}$$

Un punto de la recta es $P(0, -17, 25)$. Su vector de dirección es $\vec{v}_r = (1, 2, -2)$.

12. (Propuesto en Selectividad en 2011, Aragón)

Halla la ecuación del plano paralelo a las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv 2 - x = y = \frac{z+1}{2}, \quad s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

y que pasa por el punto $A(1, 1, 2)$.

Solución:

El plano pedido viene determinado por el punto A y por los vectores directores de las rectas dadas.

Para la recta r se tiene $\vec{v}_r = (-1, 1, 2)$.

Obsérvese que $r \equiv 2 - x = y = \frac{z+1}{2} \Leftrightarrow r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Si se expresa la recta s en su forma paramétrica:

$$s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} 2x - y = -2 - z \\ -x + y = 1 - 3z \end{cases} \Leftrightarrow s \equiv E2 + E1 \begin{cases} 2x - y = -2 - z \\ x = -1 - 4z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = -7t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (-4, -7, 1).$$

La ecuación del plano es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 - h - 4t \\ y = 1 + h - 7t \\ z = 2 + 2h + t \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -4 \\ y-1 & 1 & -7 \\ z-2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 15x - 7y + 11z - 30 = 0.$$

13. Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos $P(0, 1, 1)$ y $Q(1, 0, 1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{2}$.

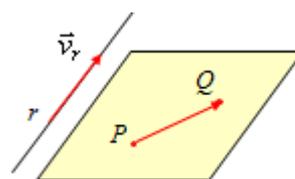
Solución:

El plano pedido viene determinado por uno de los puntos dados y por los vectores \vec{PQ} y \vec{v}_r , de dirección de la recta. Esto es, por:

$$P(0, 1, 1); \vec{PQ} = (1, 0, 1) - (0, 1, 1) = (1, -1, 0); \vec{v}_r = (1, 0, 2)$$

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z-1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv -2x - 2(y-1) + (z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + 2y - z - 1 = 0.$$



14. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P \equiv (3, -1, 4)$ y es paralelo a las rectas

$$r_1 \text{ y } r_2, \text{ de ecuaciones: } r_1 \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -3t \end{cases}; r_2 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-3}.$$

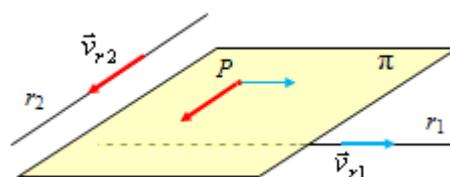
Solución:

El plano pedido viene determinado por el punto dado y por los vectores de dirección de cada una de las rectas.

Esos vectores son: $\vec{v}_{r_1} = (2, 1, -3)$; $\vec{v}_{r_2} = (1, 2, -3)$.

Por tanto:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t + h \\ y = -1 + t + 2h \\ z = 4 - 3t - 3h \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & 2 & 1 \\ y+1 & 1 & 2 \\ z-4 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y + z - 6 = 0.$$



15. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y = -1 \\ y - z = 1 \end{cases}$ y el punto $A(1, 1, 1)$, calcula:

- Un vector director de la recta r .
- El plano π que contiene a la recta r y al punto A .

Solución:

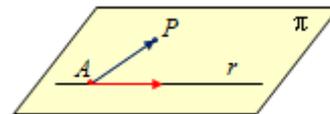
a) Se expresa r en función de sus ecuaciones paramétricas.

$$r: \begin{cases} x - y = -1 \\ y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow r: \begin{cases} x = -1 + y \\ z = -1 + y \end{cases} \Leftrightarrow r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 1).$$

b) El plano π viene determinado por el punto $P(-1, 0, -1)$, el vector \vec{v}_r y el vector $\mathbf{AP} = (-1, 0, -1) - (1, 1, 1) = (-2, -1, -2)$.

Su ecuación es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x+1 & 1 & -2 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: x - z = 0.$$

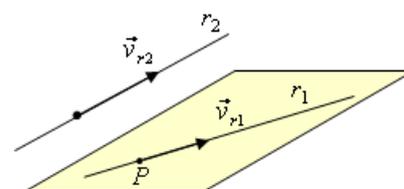


16. Halla la ecuación general del plano que contiene a la recta $r_1: \frac{x-1}{2} = y = 2-z$ y es

paralelo a la recta $r_2: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

Solución:

El plano pedido viene determinado por un punto cualquiera, $P \in r_1$, y por los vectores \vec{v}_{r_1} y \vec{v}_{r_2} , de dirección de las rectas r_1 y r_2 , respectivamente.



Para obtener el punto y los vectores se expresan ambas rectas en su forma paramétrica.

$$r_1: \frac{x-1}{2} = y = 2-z \rightarrow r_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow r_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow P = (1, 0, 2); \vec{v}_{r_1} = (2, 1, -1)$$

$$r_2: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow r_2: \begin{cases} x - y = z \\ x - 2y = -z \end{cases} \rightarrow \text{Restando ambas ecuaciones: } E1 - E2:$$

$$\Rightarrow r_2: \begin{cases} x - y = z \\ y = 2z \end{cases} \rightarrow (\text{haciendo } z = h) \Rightarrow r_2: \begin{cases} x = 3h \\ y = 2h \\ z = h \end{cases} \rightarrow \vec{v}_{r_2} = (3, 2, 1).$$

Por tanto, el plano pedido es:

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + 2t + 3h \\ y = t + 2h \\ z = 2 - t + h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ y & 1 & 2 \\ z-2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(x-1) - 5y + z - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi: 3x - 5y + z - 5 = 0.$$

17. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, -1)$ y es paralela a

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-1}$$

Halla también la ecuación del plano que contenga a ambas rectas.

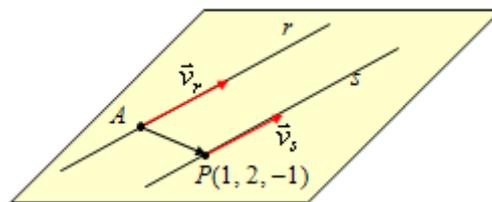
Solución:

La recta pedida difiere de la dada sólo en su posición. Su ecuación será:

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

El plano viene determinado por el punto $A(1, 3, 0) \in$

r y por los vectores $\vec{v}_r = (2, 2, -1)$ y $\mathbf{AP} = (1, 2, -1) - (1, 3, 0) = (0, -1, -1)$.



Su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-3 & 2 & -1 \\ z & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi: -3x + 2y - 2z - 3 = 0.$$

Otros problemas (I)

18. Dibuja el triángulo de vértices los puntos $A(0, 2, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 0, 2)$. Halla la ecuación del plano que los contiene.

Solución:

Los puntos dados se encuentran en los ejes cartesianos, como se indica en la figura adjunta.

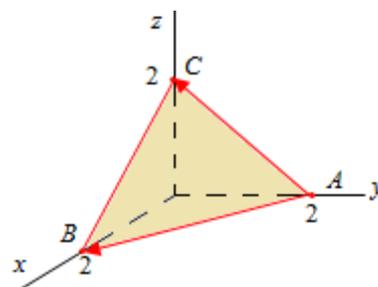
Dos de los vectores que determinan este plano son:

$$\mathbf{AB} = (2, -2, 0) \text{ y } \mathbf{AC} = (0, -2, 2).$$

Luego, su ecuación será:

$$\pi: \begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ y-2 & -2 & -2 \\ z & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: -4x - 4(y-2) - 4z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: x + y + z - 2 = 0.$$



19. (Propuesto en Selectividad en 2012, Castilla la Mancha)

Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x - y + 3z = -3$ con los ejes de coordenadas.

Solución:

El plano corta a los ejes en los puntos: $A(-3, 0, 0)$; $B(0, 3, 0)$; $C(0, 0, -1)$

El área del triángulo viene dada por: $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

Los vectores \mathbf{AB} y \mathbf{AC} son:

$$\mathbf{AB} = (0, 3, 0) - (-3, 0, 0) = (3, 3, 0); \mathbf{AC} = (0, 0, -1) - (-3, 0, 0) = (3, 0, -1).$$

Luego:

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(-3, 3, 9)| \rightarrow S = \frac{1}{2} \sqrt{9+9+81} = \frac{3}{2} \sqrt{11} \text{ u}^2.$$

20. Sean A , B y C los puntos de intersección del plano de ecuación $x + 4y + 2z - 4 = 0$ con los tres ejes coordenados OX , OY y OZ , respectivamente. Calcula:

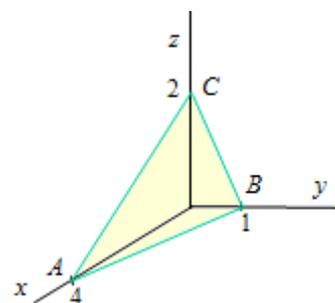
- El área del triángulo ABC .
- El perímetro del triángulo ABC .
- Los tres ángulos interiores del triángulo ABC .

Solución:

El punto A se obtiene haciendo $y = z = 0$ y despejando en la ecuación del plano: se obtiene $x = 4$. Por tanto, $A = (4, 0, 0)$

De manera análoga, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (0, 0, 2)$.

La idea se indica en el dibujo adjunto.



a) El área del triángulo ABC viene dada por $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

En este caso:

$$\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0) - (4, 0, 0) = (-4, 1, 0); \overrightarrow{AC} = (0, 0, 2) - (4, 0, 0) = (-4, 0, 2)$$

Luego,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, 8, 4) \Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{84} \text{ y } S = \frac{\sqrt{84}}{2} = \sqrt{21}.$$

b) El perímetro del triángulo es la suma de los módulos de los vectores que determinan sus lados.

$$p = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} + \sqrt{(-4)^2 + 2^2} + \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{17} + 3\sqrt{5}.$$

El vector $\overrightarrow{BC} = (0, 0, 2) - (0, 1, 0) = (0, -1, 2)$.

c) El coseno del ángulo que forman los vectores \vec{u} y \vec{v} viene dado por $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$.

En este caso:

$$\text{Ángulo } A: \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{(-4, 1, 0) \cdot (-4, 0, 2)}{\sqrt{(-4)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 2^2}} = \frac{16}{\sqrt{340}} \rightarrow \hat{A} = 29,81^\circ.$$

$$\text{Ángulo } B: \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{(4, -1, 0) \cdot (0, -1, 2)}{\sqrt{4^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{85}} \rightarrow \hat{B} = 83,77^\circ.$$

$$\text{Ángulo } C: \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{(4, 0, -2) \cdot (0, 1, -2)}{\sqrt{4^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{10} \rightarrow \hat{C} = 66,42^\circ.$$

21. Dados los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(0, 0, 2)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$, halla un punto $C \in r$ de

forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en C .

Solución:

La situación es la representada en la figura adjunta.

El triángulo ABC será rectángulo en C cuando los vectores \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{BC} sean perpendiculares. Para ello: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

El punto C de la recta es de la forma: $C = (1, 1 + \lambda, 1 + \lambda)$. Por tanto:

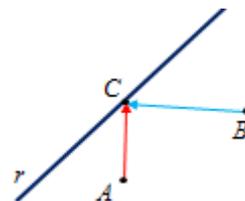
$$\overrightarrow{AC} = (0, \lambda, 1 + \lambda); \overrightarrow{BC} = (1, 1 + \lambda, -1 + \lambda).$$

Luego:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/2 \text{ o } \lambda = -1.$$

Se obtienen dos soluciones para C :

Si $\lambda = 1/2$, $C = (1, 3/2, 3/2)$; y si $\lambda = -1$, $C = (1, 0, 0)$.



Posiciones relativas de dos y tres planos

22. Halla la posición relativa de los pares de planos siguientes. Si se cortan, halla la ecuación de la recta que determinan.

- a) $\pi \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ y $\alpha \equiv x - 3y - z = 0$.
 b) $\pi \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ y $\alpha \equiv -2x - y + z - 2 = 0$.
 c) $\pi \equiv x - 3y + 2z - 1 = 0$ y $\alpha \equiv 2x - 6y + 4z - 2 = 0$.

Solución:

a) Como los vectores normales de ambos planos son distintos (no dependientes), los planos se cortan: $\vec{v}_\pi = (2, 1, -1)$; $\vec{v}_\alpha = (1, -3, -1)$.

La recta que determinan es:

$$r: \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r: \begin{cases} 2x - z = -1 - y \\ x - z = 3y \end{cases} \Leftrightarrow r: \begin{matrix} E1 - E2 \\ \end{matrix} \begin{cases} x = -1 - 4y \\ x - z = 3y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r: \begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = t \\ z = -1 - 7t \end{cases}$$

Un punto de la recta es $P(-1, 0, -1)$. Su vector de dirección es $\vec{v}_r = (-4, 1, -7)$.

b) Los vectores normales de ambos planos son "iguales" (dependientes): $\vec{v}_\pi = (2, 1, -1)$; $\vec{v}_\alpha = (-2, -1, 1)$. Por tanto, los planos son paralelos o iguales. Serán iguales cuando cualquier punto de π , por ejemplo, $Q(0, 0, 1)$, pertenezca a α . Como no es así, los planos son paralelos.

c) Como resulta evidente, la ecuación del segundo plano se obtiene multiplicando por 2 la primera. Por tanto, ambos planos coinciden: son el mismo plano.

23. Dados los planos de ecuación:

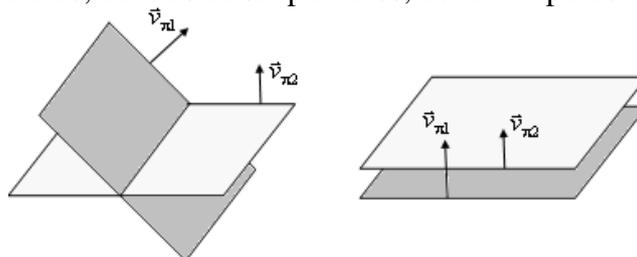
$$\pi_1 \equiv 2x + ky - z = 1 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv x - 3y - k^2z = k$$

- a) Estudia, en función del parámetro k , su posición relativa.
 b) ¿Existe algún valor de k para el que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares?

Solución:

a) Dos planos pueden cortarse, coincidir o ser paralelos.

- Se cortan cuando sus vectores normales son independientes.
- Son paralelos cuando sus vectores normales son dependientes: $\vec{v}_{\pi_1} = p \vec{v}_{\pi_2}$
- Son coincidentes cuando, además de ser paralelos, tienen un punto en común.



Los vectores normales son: $\vec{v}_{\pi_1} = (2, k, -1)$ y $\vec{v}_{\pi_2} = (1, -3, -k^2)$.

Esos vectores son linealmente dependientes si sus coordenadas son proporcionales; esto es, si

$$\frac{2}{1} = \frac{k}{-3} = \frac{-1}{-k^2}.$$

No hay ningún valor de k que cumpla esa relación, pues:

$$\text{de } \frac{3}{1} = \frac{k}{-2} \Rightarrow k = -6; \text{ y de } \frac{2}{1} = \frac{-1}{-k^2} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En consecuencia, los planos dados se cortan para cualquier valor de k .

b) Los planos son perpendiculares cuando lo son sus vectores normales: Para ello, su producto escalar debe ser cero: $\vec{v}_{\pi_1} \cdot \vec{v}_{\pi_2} = 0$.

$$\vec{v}_{\pi_1} \cdot \vec{v}_{\pi_2} = (2, k, -1) \cdot (1, -3, -k^2) = 2 - 3k + k^2 = 0 \Rightarrow k = 1, k = 2.$$

Los planos son perpendiculares cuando $k = 1$ o $k = 2$.

24. Halla la posición relativa de los tres planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv 2x + y - z = 2; \pi_2 \equiv x + 2y - z = 3; \pi_3 \equiv x - 2y - z = -1.$$

Si se cortan, halla el punto o la ecuación de la recta que determinan.

Solución:

Hay que estudiar el sistema que determinan:
$$\begin{cases} \pi_1 : 2x + y - z = 2 \\ \pi_2 : x + 2y - z = 3 \\ \pi_3 : x - 2y - z = -1 \end{cases} \rightarrow (\text{Por Gauss}) \rightarrow$$

$$\Rightarrow E2 - E3 \begin{cases} x + 3y = 3 \\ 4y = 4 \\ x - 2y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 1; x = 0; z = -1.$$

Los planos se cortan en el punto de coordenadas $(0, 1, -1)$.

25. Halla la posición relativa de los tres planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv x + 10y - 5z = 11; \pi_2 \equiv x + 2y - z = 3; \pi_3 \equiv x - 2y + z = -1.$$

Si se cortan, halla el punto o la ecuación de la recta que determinan.

Solución:

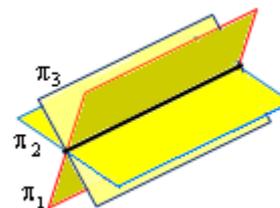
El sistema asociado es:

$$\begin{cases} \pi_1 : x + 10y - 5z = 11 \\ \pi_2 : x + 2y - z = 3 \\ \pi_3 : x - 2y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow E2 - E1 \begin{cases} x + 10y - 5z = 11 \\ -8y + 4z = -8 \\ -12y + 6z = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 10y - 5z = 11 \\ -8y + 4z = -8 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Como el sistema resulta compatible indeterminado, los tres planos tienen una recta en común.

Su ecuación es:

$$r \equiv \begin{cases} x + 10y - 5z = 11 \\ -8y + 4z = -8 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 11 - 10y + 5z \\ z = -2 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$



26. Halla la posición relativa de los tres planos siguientes:

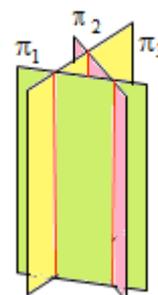
$$\pi_1 \equiv 2x + 8y - 4z = 0; \pi_2 \equiv x + 2y - z = 3; \pi_3 \equiv x - 2y + z = 1.$$

Si se cortan, halla el punto o la ecuación de la recta que determinan.

Solución:

El sistema asociado es:
$$\begin{cases} \pi_1 : 2x + 8y - 4z = 0 \\ \pi_2 : x + 2y - z = 3 \\ \pi_3 : x - 2y + z = 1 \end{cases} \rightarrow (\text{Por Gauss}) \rightarrow$$

$$\Rightarrow E1 - 2E3 \begin{cases} 12y - 6z = -2 \\ 4y - 2z = 2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow E1 - 3E2 \begin{cases} 0 = -8 \\ 4y - 2z = 2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$



El sistema resultante es incompatible; por tanto, los tres planos no tienen ningún punto en común, se cortan dos a dos.

27. Halla la ecuación del haz de planos determinado por

$$\pi : x - y + 2z - 5 = 0 \text{ y } \pi' : 2x - y - 2z + 4 = 0$$

De ellos, halla el plano que pasa por el punto $P(0, -11, 4)$.

Solución:

La ecuación del haz de planos es:

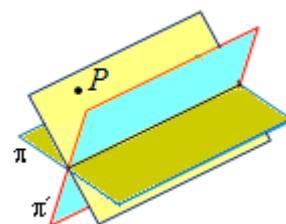
$$x - y + 2z - 5 + k(2x - y - 2z + 4) = 0$$

El plano que pasa por el punto $P(0, -11, 4)$ cumple:

$$0 - (-11) + 2 \cdot 4 - 5 + k(0 - (-11) - 2 \cdot 4 + 4) = 0 \Rightarrow 14 + 7k = 0 \Rightarrow k = -2.$$

Luego, el plano del haz que contiene a P es:

$$x - y + 2z - 5 - 2(2x - y - 2z + 4) = 0 \Rightarrow -3x + y + 6z - 13 = 0.$$



28. Halla la ecuación del plano definido por el punto $P(-1, 2, 0)$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$.

Solución:

El plano pedido es uno del haz determinado por la recta, cuya ecuación es:

$$x - 2y + 1 + k(x - y + z - 1) = 0$$

Como debe contener a $P(-1, 2, 0) \Rightarrow -4 + k(-4) = 0 \Rightarrow k = -1$.

El plano pedido es: $x - 2y + 1 - (x - y + z - 1) = 0 \Rightarrow -y - z + 2 = 0$.

29. Estudia, para los diferentes valores del parámetro m , la posición relativa de los planos:

$$\pi_1 : mx - y + 3z = m; \pi_2 : 2x + 4z = 1; \pi_3 : x - y + 2z = -2.$$

Solución:

Hay que discutir el sistema asociado:
$$\begin{cases} mx - y + 3z = m \\ 2x + 4z = 1 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

Las matrices A , de coeficientes del sistema, y M , ampliada, son:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & 3 & m \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right) = M.$$

El determinante de A , $|A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4m - 6$, que se anula para $m = \frac{6}{4}$.

Por tanto:

- si $m \neq \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, el determinante de $A \neq 0$ y el rango de A vale 3. En este caso, el sistema será compatible determinado, lo que indica que los tres planos tienen un único punto en común.
- si $m = \frac{3}{2}$, el determinante de $A = 0$ y el rango de A vale 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

La matriz M queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3/2 & -1 & 3 & 3/2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right) = M$.

Como el menor $M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3/2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 10 + 3 \neq 0$, se deduce que el rango de M es 3.

En consecuencia, si $m = \frac{3}{2}$, el sistema es incompatible, lo que indica que los planos no tienen ningún punto en común. Como ninguno de los planos es paralelo a otro, los planos se cortan dos a dos.

30. Estudia, para los diferentes valores del parámetro a , la posición relativa de los planos:

$$\pi_1 : x + y + 2z = 0; \quad \pi_2 : x + ay + 3z = 1; \quad \pi_3 : x + y + (2 - a)z = a.$$

Cuando sean del mismo haz, determina la recta común.

Solución:

Se discute el sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + ay + 3z = 1 \\ x + y + (2 - a)z = a \end{cases}$ en función del parámetro a .

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 - a & a \end{array} \right) = M$

El determinante de A , $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 2 - a \end{vmatrix} = a - a^2 = a(1 - a) \Rightarrow$ Se anula si $a = 0$ o $a = 1$.

Con esto:

- Si $a \neq 0$ y $1 \Rightarrow r(A) = 3 = r(M)$. El sistema será compatible determinado \Rightarrow Los tres planos se cortan en un único punto.

- Si $a = 0$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) = M$

Como $F3 = F1 \Rightarrow r(A) = r(M) = 2$. El sistema será compatible indeterminado. Los tres planos se cortan en una recta: son del mismo haz.

Para $a = 0$, el sistema inicial es equivalente a: $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -2z \\ x = 1 - 3z \end{cases}$.

Haciendo $z = t$ se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta con: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$.

• Si $a = 1$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = M$. El rango de A es 2, las columnas 1ª y 2ª son

iguales. Sin embargo, el rango de M vale 3, pues $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Luego el sistema

será incompatible. En este caso, los planos no tienen ningún punto en común: se cortan dos a dos.

31. Halla, según los valores del parámetro a , la posición relativa de los planos dados por las

ecuaciones: $\begin{cases} \pi_1 \equiv x + 2z = 0 \\ \pi_2 \equiv 3y + z = 0 \\ \pi_3 \equiv ax + z = 0 \end{cases}$.

Cuando sean del mismo haz, determina la recta común.

Solución:

Estos planos forman un sistema homogéneo. Como siempre es compatible, los planos se cortarán en un punto (cuando el rango de la matriz de coeficientes sea 3) o determinarán una recta (cuando el rango sea 2).

La matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Su determinante: $|A| = 3(1 - 2a) = 0$ si $a = 1/2$. Con esto:

- Si $a \neq 1/2$, $r(A) = 3$, el sistema será compatible determinado \Rightarrow Los planos se cortarán en un único punto.
- Si $a = 1/2$, $r(A) = 2$. Sistema compatible indeterminado \Rightarrow Los planos tienen una recta en común: son del mismo haz.

En este caso ($a = 1/2$), el sistema queda $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 3y + z = 0 \\ x/2 + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$, cuya solución es la

recta pedida: $r \equiv \begin{cases} x = 6t \\ y = t \\ z = -3t \end{cases}$.

Posiciones relativas de una recta y un plano

32. Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + 3z = 6$.

En el caso de que se corten halla el punto común.

Solución:

Es inmediato comprobar que la recta y el plano no son paralelos pues el vector de dirección de la recta, $\vec{v}_r = (-1, 0, 1)$, y el normal al plano, $\vec{v}_\pi = (2, -1, 3)$, no son perpendiculares: su producto escalar vale $-2 + 3 \neq 0$.

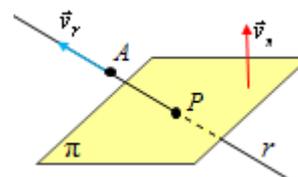
Tampoco la recta está contenida en el plano, pues el punto $A(0, 0, 1) \in r$ no pertenece al plano.

Por tanto, la recta corta al plano.

El punto de corte puede hallarse sustituyendo las ecuaciones de la recta en la del plano:

$$\pi \equiv 2(-\lambda) + 3(1 + \lambda) = 6 \Rightarrow \lambda = 3.$$

Para $\lambda = 3$ se obtiene el punto $P(-3, 0, 4)$.



33. Sea r la recta que pasa por el punto $P(1, -1, 1)$ y tiene como vector director $(1, 2, -2)$. ¿Existe algún valor de a para el cual la recta r está contenida en el plano $2x + 3y + 4z = a$?

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$.

La recta está contenida en el plano cuando cualquier punto genérico de ella verifica la ecuación del plano. Esto es, cuando las ecuaciones de r cumplen la del plano:

$$2(1+t) + 3(-1+2t) + 4(1-2t) = a \Rightarrow 2-3+4+2t+6t-8t = a \Rightarrow a = 3.$$

Por tanto, la recta está contenida en el plano cuando $a = 3$.

34. (Propuesto en Selectividad en 2012, Cataluña)

Dados el plano $\pi: x - y + 2z - 5 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$.

- Calcula el punto de intersección entre el plano y la recta.
- Calcula la ecuación de la recta s que está contenida en el plano π , es perpendicular a la recta r y corta la recta r .

Solución:

a) El punto de corte es la solución del sistema asociado a las ecuaciones de la recta y el plano:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} E2 - 2E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - z = 10 \\ -2y + z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} E3 + E2 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - z = 10 \\ -5y = 15 \end{cases} \rightarrow y = -3; z = -1, x = 4.$$

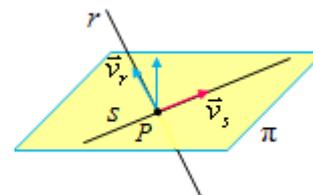
Punto $P(4, -3, -1)$.

b) La recta pedida, s , viene determinada por P y por el vector \vec{v}_s , que es perpendicular, a la vez, a \vec{v}_r y $\vec{v}_\pi = (1, -1, 2)$. Por tanto, $\vec{v}_s = \vec{v}_r \times \vec{v}_\pi$.

Para determinar \vec{v}_r se expresa la recta r en paramétricas:

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x + y = -z \\ 2x - y = 10 - z \end{cases} \Rightarrow r: E2 + E1 \begin{cases} x + y = -z \\ 3x = 10 - 2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}\lambda \\ y = -\frac{10}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (-2, -1, 3).$$



Con esto,

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r \times \vec{v}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1, 7, 3).$$

En consecuencia, como $P(4, -3, -1)$ es de la recta, sus ecuaciones son: $s \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -3 + 7t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$

35. Dada la recta $r: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y + mz - 3 = 0$, se pide:

- La posición relativa de la recta r y el plano π según los valores del parámetro m .
- El punto de intersección de la recta r y el plano π en el caso de $m = 1$.

Solución:

a) Su posición relativa se halla discutiendo el sistema determinado por la recta y el plano:

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ 2x + y + mz - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \\ 2x + y + mz = 3 \end{cases}$$

Haciendo transformaciones de Gauss se tiene:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \\ 2x + y + mz = 3 \end{cases} \xrightarrow{E2 + E1, E3 - 2E1} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y + 2z = 1 \\ -y + (m-2)z = 1 \end{cases} \xrightarrow{E3 - E2} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y + 2z = 1 \\ (m-4)z = 0 \end{cases}$$

A partir de la tercera ecuación se concluye:

- Si $m \neq 4$, el sistema tiene solución única. Esto significa que el plano y la recta se cortan en un punto.
- Si $m = 4$, el sistema es compatible indeterminado. Esto significa que la recta está contenida en el plano.

b) Para $m = 1$, el sistema queda: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y + 2z = 1 \\ -3z = 0 \end{cases}$. Su solución es: $z = 0, y = -1, x = 2$.

Por tanto, la recta y el plano se cortan en el punto $(2, -1, 0)$.

Posiciones relativas de dos rectas

36. Determina la posición relativa entre las rectas: $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$; $s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$.

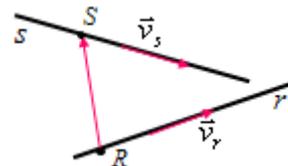
Solución:

Debe estudiarse la dependencia lineal de los vectores \vec{v}_r , \vec{v}_s y \mathbf{RS} ,

donde $R \in r$ y $S \in s$.

Si los tres vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, con $\vec{v}_r \neq \vec{v}_s$, se cortan; si

$\vec{v}_r = k\vec{v}_s$, las rectas son paralelas.



Se tiene:

$$\vec{v}_r = (1, 1, -1), \vec{v}_s = (1, 2, 0) \text{ y } \mathbf{RS} = (1, 0, 0) - (0, 2, 0) = (1, -2, 0).$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4$, los vectores son linealmente independientes.

En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

37. Dadas las rectas $r : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = a + 2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -1 + 7t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$, determina su posición relativa

dependiendo del valor de a .

Solución:

Las rectas nunca pueden ser paralelas, pues $\vec{v}_r = (3, 2, 2)$ y $\vec{v}_s = (5, 7, 2)$ no indican la misma dirección.

Las rectas se cortarán si los vectores $\vec{v}_r = (3, 2, 2)$, $\vec{v}_s = (5, 7, 2)$ y \mathbf{RS} son linealmente dependientes, siendo R un punto de r y S un punto de s .

Si $R = (0, a, 1)$ y $S = (2, -1, 3) \Rightarrow \mathbf{RS} = (2, -1 - a, 2)$.

Los vectores serán linealmente dependientes cuando su determinante asociado valga 0.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 2 \\ 2 & -1-a & 2 \end{vmatrix} = -4a - 2 \Rightarrow -4a - 2 = 0 \text{ si } a = -\frac{1}{2}.$$

Las rectas se cortan cuando $a = -\frac{1}{2}$. En los demás casos se cruzan; esto es, cuando $a \neq -\frac{1}{2}$.

38. Dadas las rectas $r : \frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-4}$ y $s : \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - y + z + 11 = 0 \end{cases}$.

a) Comprueba que son paralelas.

b) Halla la ecuación general del plano que las contiene.

Solución:

a) Las ecuaciones de ambas rectas en forma paramétrica son:

$$r: \frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-4} \Leftrightarrow r: \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 4t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (3, 2, -4);$$

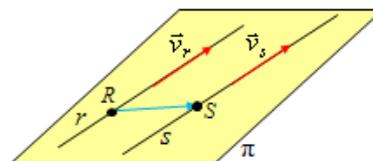
$$s: \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - y + z + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} 2x + y = -5 - 2z \\ 2x - y = -11 - z \end{cases} \rightarrow (\text{Sumando } E2 + E1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s: \begin{cases} 2x + y = -5 - 2z \\ 4x = -16 - 3z \end{cases} \Rightarrow x = -4 - \frac{3}{4}z; y = 3 - \frac{2}{4}z.$$

$$\text{Haciendo } z = 4h \text{ se tiene: } s: \begin{cases} x = -4 - 3h \\ y = 3 - 2h \\ z = 4h \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (-3, -2, 4).$$

Resulta evidente que ambas rectas tienen el mismo vector de dirección: $\vec{v}_r = -\vec{v}_s$.

b) Si dos rectas son paralelas siempre hay un plano que las contiene. Viene determinado por un punto de alguna de ellas, por ejemplo, $R = (-5, 1, 2) \in r$, y por los vectores \vec{v}_r y \mathbf{RS} , siendo $S = (-4, 3, 0) \in s$. El vector $\mathbf{RS} = (1, 2, -2)$.



Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$\pi: \begin{cases} x = -5 + 3t + h \\ y = 1 + 2t + 2h \\ z = 2 - 4t - 2h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+5 & 3 & 1 \\ y-1 & 2 & 2 \\ z-2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi: 2x + y + 2z + 5 = 0.$$

39. Determina la posición de las rectas r y s , de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = -5 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x - y = -5 \\ z = 4 \end{cases},$$

Solución:

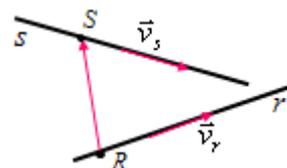
Sus ecuaciones en forma paramétrica son:

$$r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow E1 - E2 \quad r \equiv \begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ 2x - 2y - z = -5 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 - y \\ y = y \\ 6 - 4x - z = -5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{haciendo } y = t) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \\ z = 11 - 4t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (-1, 1, -4), R = (3, 0, 11) \in r.$$

$$s \equiv \begin{cases} x - y = -5 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -5 + y \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -5 + h \\ y = h \\ z = 4 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (1, 1, 0), S = (-5, 0, 4).$$

La dependencia lineal de los vectores \vec{v}_r , \vec{v}_s y \mathbf{RS} , siendo $R \in r$ y $S \in s$, determina la posición relativa de ambas rectas: si son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano.



En este caso:

$$\vec{v}_r = (-1, 1, -4), \vec{v}_s = (1, 1, 0) \text{ y } \mathbf{RS} = (-5, 0, 4) - (3, 0, 11) = (-8, 0, -7).$$

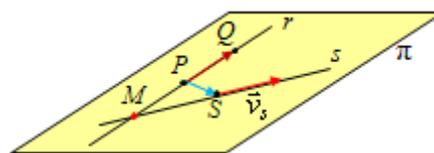
Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 7 + 7 - 32 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

40. Determina la posición relativa de las rectas r y s , siendo r la recta que pasa por los puntos $P(0, 8, 3)$ y $Q(2, 8, 5)$ y $s: \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$. Si se cortan, halla el punto de corte.

Solución:

La recta r queda definida por $P(0, 8, 3)$ y el vector $\mathbf{PQ} = (2, 8, 5) - (0, 8, 3) = (2, 0, 2)$.

Sus ecuaciones son: $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 8 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.



Las ecuaciones paramétricas de s son:

$$s: \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow s: \begin{cases} x = y - 7 \\ y = 2z \end{cases} \rightarrow (\text{haciendo } z = h) \Rightarrow s: \begin{cases} x = -7 + 2h \\ y = 2h \\ z = h \end{cases}$$

La posición relativa de r y s se deduce estudiando la dependencia lineal de los vectores:

$\vec{v}_r = (2, 0, 2)$, $\vec{v}_s = (2, 2, 1)$ y $\mathbf{PS} = (-7, 0, 0) - (0, 8, 3) = (-7, -8, -3)$, donde $S = (-7, 0, 0)$ es un punto de s .

Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -7 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$, los vectores son linealmente dependientes. En consecuencia, las rectas r y s se cortan.

Para hallar el punto de corte se resuelve el sistema:

$$r: \begin{cases} x = 2t & x = -7 + 2h \\ y = 8 & y = 2h \\ z = 3 + 2t & z = h \end{cases} : s \Rightarrow \begin{cases} 2t = -7 + 2h \\ 8 = 2h \\ 3 + 2h = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1/2 \\ h = 4 \end{cases}$$

Para $h = 4$, sustituyendo en s , se obtiene $M(1, 8, 4)$. (Obviamente, para $t = 1/2$, sustituyendo en r , se obtiene el mismo punto).

41. (Propuesto en Selectividad en 2011, La Rioja)

La recta r de ecuación $\frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta s que pasa por los puntos $P(1, 0, 2)$ y

$Q(a, 1, 0)$ se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

Solución:

Las rectas se cortan cuando los vectores:

$$\vec{v}_r = (2, 2, 3),$$

$$\vec{v}_s = \mathbf{PQ} = (a, 1, 0) - (1, 0, 2) = (a - 1, 1, -2) \text{ y}$$

$$\mathbf{RP} = (1, 0, 2) - (-3, -4, 3) = (4, 4, -1)$$

sean linealmente dependientes, siendo $R(-3, -4, 3)$ un punto de r y P un punto de s ,
Para ello:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ a-1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 14a - 28 = 0 \Rightarrow a = 2.$$

Si $a = 2$, $\vec{v}_s = (1, 1, -2)$, y la recta s será: $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$.

El punto de corte de ambas rectas se determina resolviendo el sistema:

$$r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}; s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

Expresando r en sus ecuaciones paramétricas e igualando coordenadas se tiene:

$$r \equiv \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -4 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 + 2t = 1 + \lambda \\ -4 + 2t = \lambda \\ 3 + 3t = 2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t - \lambda = 4 \\ 3t + 2\lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -2; t = 1.$$

El punto pedido es: $C \equiv \begin{cases} x = 1 - 2 \\ y = -2 \\ z = 2 + 4 \end{cases} \Rightarrow C(-1, -2, 6)$.

42. Demuestra que las rectas r y s se cruzan:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{3} = z-2, s: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-3}.$$

Solución:

Se consideran los vectores: \vec{v}_r , \vec{v}_s y \mathbf{RS} , siendo $R \in r$ y $S \in s$. Si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan.

$$\vec{v}_r = (3, 3, 1), \vec{v}_s = (3, 4, -3); R = (1, -2, 2), S = (-1, 0, 1) \rightarrow \mathbf{RS} = (0, 2, -1)$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 15 = 21 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En

consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

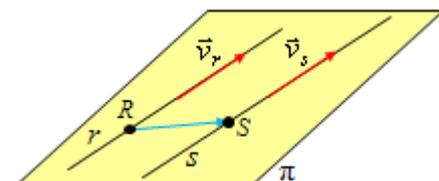
43. Estudia la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$ y $s: \begin{cases} x = 1 + 6\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$.

Si determinan un plano, halla su ecuación.

Solución:

Como $\vec{v}_r = (3, 2, -2)$ y $\vec{v}_s = (6, 4, -4) = 2\vec{v}_r$, las rectas son paralelas o coincidentes.

Al ser $\mathbf{RS} = (1, 0, 0) - (3, 1, -1) = (-2, -1, 1)$, con $R(3, 1, -1) \in r$ y $S(1, 0, 0) \in s$, independiente de \vec{v}_r ,



las rectas no son coincidentes. Por tanto, son paralelas y definen un plano.

El plano queda determinado por el punto R y por los vectores \vec{v}_r y \overrightarrow{RS} .

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 3 & -2 \\ y-1 & 2 & -1 \\ z+1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y+z=0.$$

44. Estudia en función de los valores del parámetro a , la posición relativa de las rectas r y s :

$$r \equiv \begin{cases} x-ay=2 \\ ay+z=1 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x-z=1 \\ y+z=3 \end{cases}.$$

Solución:

Hay dos métodos que permiten determinar esa posición:

1) Discutir el sistema asociado (sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas). Si el sistema es compatible determinado las rectas se cortan; si es incompatible, se cruzan. (Podría darse también el paralelismo, pero esas dos posiciones se descubren vectorialmente).

2) Estudiar la dependencia lineal de los vectores \vec{v}_r , \vec{v}_s y \overrightarrow{RS} , siendo $R \in r$ y $S \in s$. Si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano, pudiendo ser paralelas o cortarse.

Primer método

$$\text{Las rectas generan el sistema lineal } \begin{cases} x-ay & = 2 \\ & ay+z=1 \\ x & -z=1 \\ & y+z=3 \end{cases}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) = M \rightarrow (F3 - F1) \rightarrow A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & a & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) = M$$

El determinante de M , desarrollado por la primera columna, es:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2a - 2a = -4a \rightarrow \text{su valor es } 0 \text{ si } a = 0.$$

Luego:

- Si $a \neq 0 \Rightarrow r(M) = 4$, con lo que el sistema sería incompatible, pues del rango de A como máximo vale 3. En este caso, las rectas se cruzarán.

• Si $a = 0$, las matrices quedan $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) = M$, cumpliéndose que $r(A) = r(M) =$

3, ya que $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$. En este caso el sistema es compatible determinado (solución

única: los cuatro planos tienen un punto en común), lo que indica que las rectas se cortarán.

Segundo método

Expresando las rectas en forma paramétrica se tiene:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + at \\ y = t \\ z = 1 - at \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 3 - h \\ z = h \end{cases}$$

Por tanto: $\vec{v}_r = (a, 1, -a)$, $\vec{v}_s = (1, -1, 1)$ y $\overrightarrow{RS} = (1, 3, 0) - (2, 0, 1) = (-1, 3, -1)$.

Como $\begin{vmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2a - 2a = -4a \Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes cuando

$a = 0$, y linealmente independientes si $a \neq 0$.

En consecuencia, las rectas r y s se cruzan si $a \neq 0$; y se cortan si $a = 0$.

Otros problemas (II)

45. Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(3, 1, 2)$; y $s \equiv \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$.

Halla:

- Su posición relativa.
- Si se cortan, su punto de intersección.
- Si existe, el plano que las contenga.

Solución:

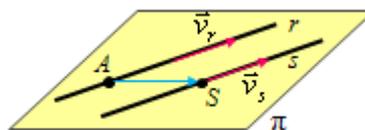
Las ecuaciones paramétricas de ambas rectas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \rightarrow \text{El vector director es } \vec{v}_r = \vec{b} - \vec{a} = (3, 1, 2) - (1, 1, 1) = (2, 0, 1).$$

$$s \equiv \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow (\text{haciendo } z = t) \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (2, 0, 1).$$

a) Como $\vec{v}_r = \vec{v}_s$, las rectas son paralelas.

b) ¿Podrían ser coincidentes? No, pues en la recta r la componente y siempre vale 1, mientras que en s la misma componente siempre vale 2.



c) Si dos rectas son paralelas siempre hay un plano que las contiene. Dicho plano viene determinado por el punto $A(1, 1, 1) \in r$, y por los vectores \vec{v}_r y \vec{AS} , siendo S cualquier punto de s .

Tomando $S(1, 2, 0) \Rightarrow \vec{AS} = (1, 2, 0) - (1, 1, 1) = (0, 1, -1)$.

El plano pedido es:
$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -x + 2y + 2z - 3 = 0.$$

46. (Propuesto en Selectividad 2012, Comunidad Valenciana)

Se dan las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$, siendo α y β parámetros reales. Calcula

las coordenadas del punto de corte de r_1 y r_2 .

Solución:

Igualando las componentes de ambas rectas:
$$\begin{cases} 1 + 2\alpha = -1 \\ \alpha = 1 + \beta \\ 2 - \alpha = -1 - 2\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = -1; \beta = -2.$$

Por tanto, el punto de corte es $P(-1, -1, 3)$.

47. a) Halla la ecuación general del plano que pasa por los puntos $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ y $(3, 1, 2)$

b) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $(1, 0, -1)$ y $(1, -1, 0)$.

c) Determina la posición relativa de la recta y el plano.

Solución:

a) Sean $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 1)$ y $C(3, 1, 2)$.

El plano viene determinado por el punto $A(1, 2, 3)$ y por los vectores

$$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a} = (2, 3, 1) - (1, 2, 3) = (1, 1, -2);$$

$$\vec{w} = \vec{c} - \vec{a} = (3, 1, 2) - (1, 2, 3) = (2, -1, -1).$$

Su ecuación es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-2 & 1 & -1 \\ z-3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3(x-1) - 3(y-2) - 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow \pi: x + y + z - 6 = 0.$$

b) Sean $P(1, 0, -1)$ y $Q(1, -1, 0)$.

La recta pedida viene determinada por el punto $P(1, 0, -1)$ y el vector:

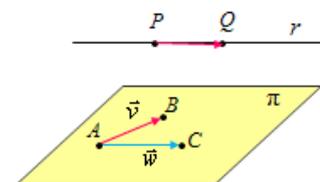
$$\vec{PQ} = (1, -1, 0) - (1, 0, -1) = (0, -1, 1).$$

Su ecuación es:
$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

c) Para determinar la posición relativa entre la recta y el plano se sustituyen las ecuaciones de la recta en la del plano. Se obtiene:

$$1 - t - 1 + t - 6 = 0 \Rightarrow -6 = 0$$

Como esa igualdad no tiene sentido, se concluye que la recta y el plano no se cortan. Esto es, que la recta es paralela al plano.



48. Halla la ecuación de la paralela a la recta $r: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ que pasa por el punto $(0, 1, 0)$.

Solución:

La ecuación de la paralela, r' , viene dada por dos planos paralelos a los que determinan r y que pasan por $(0, 1, 0)$. Esto es:

$$r': \begin{cases} x + (y - 1) - z = 0 \\ 2x - (y - 1) + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow r': \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$$

Sus ecuaciones paramétricas, que se obtienen resolviendo el sistema, son: $r': \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$.

De otra forma:

Las ecuaciones paramétricas de r son $\begin{cases} x = 1/3 \\ y = -1/3 + t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (0, 1, 1) \Rightarrow r': \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$.

49. Dadas las rectas de ecuaciones: $r \equiv \begin{cases} 2x - y = m \\ z + 2y = 3 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$.

¿Qué valor debe tomar m para que ambas rectas se corten?

Solución:

Las rectas se cortarán cuando el sistema determinado por los cuatro planos que las definen tenga solución única.

$$\text{El sistema es: } \begin{cases} r \equiv \begin{cases} 2x - y = m \\ z + 2y = 3 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = m \\ 2y + z = 3 \\ x + y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$$

Este sistema será compatible determinado cuando el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada, y ambos iguales a 3.

$$\text{Las matrices son: } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = M.$$

El rango de A es 3, pues el menor $|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

Para que el rango de M sea 3 es necesario que su determinante sea nulo. Luego, como

$$|M| = 5(m - 1) \Rightarrow m = 1$$

Las rectas se cortan cuando $m = 1$.

50. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 0, 0)$ y corta a las rectas

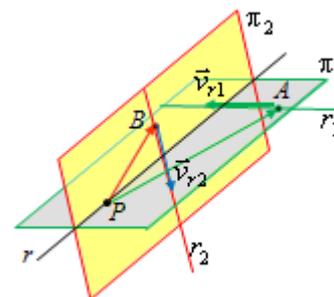
$$r_1 \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}$$

Solución:

La recta pedida será la intersección de dos planos: π_1 , que pasa por P y contiene a r_1 , y π_2 , que pasa por P y contiene a r_2

Las ecuaciones paramétricas de las rectas dadas son:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases} \rightarrow \text{Se tiene } \vec{v}_{r_1} = (1, -1, 2) \text{ y } A \in r_1, A(2, 1, 0)$$



$$r_2 \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x+z=1-2y \\ 2x-z=3+y \end{cases} \Leftrightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x=h \\ y=4-3h \\ z=-7+5h \end{cases} \rightarrow$$

Se tiene $\vec{v}_{r_2} = (1, -3, 5)$ y $B \in r_2, B(0, 4, -7)$

El plano π_1 viene dado por P, \vec{v}_{r_1} y $\vec{AP} = (-1, -1, 0)$, su ecuación es:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y & -1 & -1 \\ z & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x - y - z - 1 = 0.$$

El plano π_2 viene dado por P, \vec{v}_{r_2} y $\vec{BP} = (1, -4, 7)$, su ecuación es:

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & -3 & -4 \\ z & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x + 2y + z - 1 = 0.$$

Por tanto, la recta pedida es:

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=2-2t \\ z=-3+3t \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{3}.$$

51. (Propuesto en Selectividad en 2011, Madrid)

Halla el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas:

$$r_1 \equiv x = y = z, \quad r_2 \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}, \quad r_3 \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

Solución:

Para determinar los otros tres vértices se hallan las intersecciones del plano con cada una de las rectas:

- $r_1 \cap \pi: \pi \equiv 2x + 3x + 7x = 24 \Rightarrow x = 2$. Punto $A = (2, 2, 2)$.
- $r_2 \cap \pi: \pi \equiv 2x = 24 \Rightarrow x = 12$. Punto $B = (12, 0, 0)$.
- $r_3 \cap \pi: \pi \equiv 3y = 24 \Rightarrow y = 8$. Punto $C = (0, 8, 0)$.

Los vectores que determinan el tetraedro son:

$$\vec{OA} = (2, 2, 2); \vec{OB} = (12, 0, 0) \text{ y } \vec{OC} = (0, 8, 0).$$

El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de esos tres vectores.

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 12 \cdot 8 = 32 \text{ unidades cúbicas.}$$

52. (Propuesto en Selectividad en 2012, UNED)

Halla a y b para que los tres planos $\pi_1 : x + 2y - z = 1$, $\pi_2 : 2x + y + az = 0$ y

$\pi_3 : 3x + 3y - 2z = b$ contengan a una misma recta r . Determina unas ecuaciones paramétricas de r .

Solución:

Tres planos contienen a una misma recta cuando son del mismo haz. Ello implica que el sistema asociado debe ser compatible determinado con un grado de indeterminación.

$$\text{El sistema es: } \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + 3y - 2z = b \end{cases} . \text{ Se necesita que } r(A) = r(M) = 2, \text{ siendo } A \text{ la matriz de}$$

$$\text{coeficientes y } M \text{ la matriz ampliada: } A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 3 & 3 & -2 & b \end{array} \right) = M$$

$$\text{Para que } r(A) = 2 \text{ debe cumplirse que } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3a + 3 = 0 \rightarrow a = -1.$$

Para que $r(M) = 2$ debe cumplirse, además, que cualquier otro menor de orden 3 sea también

$$\text{nulo. Por ejemplo (sustituida ya } a \text{ por } -1), |M_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b - 1 = 0 \rightarrow b = 1.$$

En consecuencia, cuando $a = -1$ y $b = 1$, los tres planos contienen a la misma recta.

$$\text{Su ecuación se obtiene resolviendo el sistema } \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 1 - 2y \\ 2x - z = -y \end{cases} \Leftrightarrow E2 - E1 \begin{cases} x - z = 1 - 2y \\ x = -1 + y \end{cases} \Leftrightarrow E1 - E2 \begin{cases} -z = 2 - 3y \\ x = -1 + y \end{cases} .$$

$$\text{Haciendo } y = t \text{ se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta: } r \equiv \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = -2 + 3t \end{cases} .$$